JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 65, 176–199 (1991)

Semi-groupes d'opérateurs et espaces fonctionnels sur les groupes de Lie

THIERRY COULHON

Université de Paris VI, Equipe d'Analyse, Tour 46 – 4ème Etage, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

ET

LAURENT SALOFF-COSTE

CNRS, Laboratoire d'Analyse complexe et Géométrie, Université Paris VI, Tour 46 – 5ème Etage, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Communicated by P. L. Butzer

Received April 25, 1989

We prove imbedding theorems in the setting of abstract symmetric sub-markovian semi-groups, under some natural dimensional hypothesis. Our results are sharp and extend classical ones. They involve Lipschitz, Besov, and Sobolev spaces, as well as Lebesgue spaces, and include a generalization of the Herz–Bernstein Theorem on the Wiener algebra. They typically apply to function spaces associated to left invariant sub-laplacians on unimodular Lie groups, thanks to estimates obtained by Varopoulos. © 1991 Academic Press, Inc.

INTRODUCTION

Soit $(T_t)_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens symétriques sur $L^2(X, \xi)$, où (X, ξ) est un espace mesuré σ-fini. Selon N. Varopoulos [28–30], un tel semi-groupe est dit de dimension n s'il existe C tel que

$$\|T_t f\|_\infty \leqslant C t^{-n/2} \|f\|_1, \qquad \forall f \in L^1(X, \xi), \forall t > 0.$$

On a alors, si $0 < \alpha p < n$ et $p > 1$, $\|f\|_{np/(n-\alpha p)} \leqslant C' \|A^{\alpha/2} f\|_p$, $\forall f \in \mathscr{D}(A^{\alpha/2})$, où $-A$ est le générateur infinitésimal de $(T_t)_{t\geqslant 0}$ [28].

Ce résultat est une version abstraite du théorème de Sobolev classique [22; 23, p. 119], selon lequel, dans $\mathbb{R}^n$, l'espace de Sobolev L^p_α se plonge dans L^q, avec $1/q = 1/p - \alpha/n$, si $0 < \alpha p < n$ et $p > 1$. C'est alors bien sûr le laplacien usuel qui joue le rôle de $-A$, et le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$, qu'il engendre, est de dimension n au sens précédent.

0021-9045/91 $3.00

Notre point de départ a été la question de savoir si le second volet du théorème de Sobolev dans $\mathbb{R}^n$, qui affirme que, pour $\alpha p > n$, L^p_α se plonge dans l'espace de Lipschitz $\Lambda_{\alpha - n/p}$, a lui aussi un analogue en termes de semi-groupes d'opérateurs. La notion appropriée d'espace de Lipschitz est disponible depuis longtemps [3, 26] et la démonstration du théorème de plongement est très simple. On la trouvera au §3. Notons que, pour obtenir les énoncés les plus purs, nous avons choisi de travailler avec des normes homogènes (par exemple les fonctions de L^p_α ne sont pas supposées être a priori dans L^p).

Les relations que Taibleson a établies pour $\mathbb{R}^n$ [26, 23] entre l'échelle des espaces de Lipschitz et de Besov, d'une part, et celle des espaces de Sobolev, d'autre part, subsistent elles aussi dans le cadre abstrait: nous montrons au §2 que les méthodes reposant sur l'utilisation de la fonction de Littlewood- Paley g s'étendent sans difficulté majeure.

Notre propos n'est pas seulement de généraliser des résultats connus dans $\mathbb{R}^n$: le champ naturel d'application du théorème de plongement obtenu par Varopoulos, et de ceux que nous obtenons à sa suite, est constitué par les groupes de Lie unimodulaires, où la notion de dimension se dédouble en celles de dimension locale et de dimension à l'infini [29, 30]. Nous avons donc été amenés à considérer, dès le §1, des semi-groupes à deux dimensions, et des normes de Besov et de Sobolev capables d'évaluer séparément les comportements locaux et à l'infini des fonctions. Cette idée est à rapprocher de celle qui consiste à définir, dans $\mathbb{R}^n$, des espaces de Besov et de Sobolev d'ordre variable (cf. par exemple [1]).

Dans le §4, on montre que l'intersection d'un espace de Lebesgue d'une part, d'un espace de Besov, de Lipschitz, ou de Sobolev convenable d'autre part est contenue dans L^∞.

Au §5, on considère une situation un peu moins générale: (X, ξ) est un groupe localement compact muni de sa mesure de Haar. On considère l'analogue $A(X)$ de l'algèbre des transformées de Fourier de fonctions de L^1, et l'on montre que si $(T_t)_{t \geqslant 0}$ a une dimension, un certain espace de Besov se plonge dans $A(X)$, ce qui généralise un énoncé dû à Bernstein dans $\mathbb{R}$, et à Herz dans $\mathbb{R}^n$ [2, 13].

Enfin, en combinant les résultats des quatre premiers paragraphes, on obtient au §6 un tableau assez complet des différents plongements de Sobolev qui se présentent, suivant la situation des dimensions locale et à l'infini. On situe alors dans ce tableau les grandes classes de groupes de Lie unimodulaires, sur lesquels on fait agir le semi-groupe engendré par un sous-laplacien, et l'on voit apparaître, dans le cas où les dimensions locale et à l'infini diffèrent, des phénomènes qui ne se produisent pas dans $\mathbb{R}^n$. Certains des problèmes traités ici l'avaient déjà été dans le cadre des groupes stratifiés (par exemple [11, 19, 14]).

Une version résumée de cet article a paru dans [6]. Un point de vue légèrement différent y est parfois adopté. Il nous arrivera d'autre part de nous appuyer sur des arguments publiés dans [7], où sont traitées des questions voisines.

1. Espaces de Lipschitz, de Besov, et de Sobolev associés à un semi-groupe d'opérateurs

Soit (X, ξ) un espace mesuré σ-fini et $(T_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens symétriques sur $L^2(X, \xi)$, de générateur infinitésimal $-A$.

On sait [24] qu'un tel semi-groupe est analytique borné sur $L^p(X, \xi)$, pour $1 < p < +\infty$. Ceci revient à dire que, pour tout t, l'image de T_t est incluse dans $\mathscr{D}(A_p)$, où $-A_p$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe agissant sur $L^p(X, \xi)$ et que $\|AT_t\|_{p \to p} \leqslant C_p/t$, $\forall t > 0$; on déduit classiquement de cette dernière estimation que $\|A^\alpha T_t\|_{p \to p} \leqslant C_{p,\alpha}/t^\alpha$, $\forall t > 0$, pour $\alpha > 0$.

Pour pouvoir utiliser ces estimations aussi dans les cas limites $p = 1$ et $p = +\infty$, il nous arrivera de faire l'hypothèse supplémentaire que $(T_t)_{t \geqslant 0}$ est analytique borné sur $L^1(X, \xi)$. Nous verrons ce qu'il en est de cette hypothèse lorsque nous aborderons les applications de nos résultats.

Soit maintenant $\mathscr{S} = \{T_s f$, avec $s > 0$ et f mesurable bornée, à support de mesure finie$\}$; $\mathscr{S}$ est stable par $(T_t)_{t \geqslant 0}$, dense pour la norme du graphe dans $\mathscr{D}(A_p)$, et donc dans $L^p(X, \xi)$ lui-même, $\forall p$, $1 \leqslant p < +\infty$. Enfin, tous les A_p coïncident sur $\mathscr{S}$, et $\mathscr{S} \subset \mathscr{D}(A^\alpha)$, $\forall \alpha > 0$.

Nous supposerons que $\forall p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\forall f \in L^p(X, \xi)$, $T_t f = f$ $\forall t > 0$ entraîne $f = 0$. Il en résulte que $T_t f \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, pour $f \in L^p(X, \xi)$ avec $1 < p < +\infty$ et aussi que $\forall f \in \mathscr{S}$, $\forall f = 0$ entraîne $f = 0$. Ce dernier fait, joint à l'analyticité de $(T_t)_{t \geqslant 0}$, nous permettra d'affirmer que les semi-normes que nous considérerons sur $\mathscr{S}$ seront des normes, et donc d'obtenir des espaces de Banach en complétant $\mathscr{S}$ par rapport à ces normes.

Pour traiter des situations compactes, où $\xi(X) < +\infty$ et donc où les constantes appartiennent à $L^p(X, \xi)$, et sont, dans les exemples, invariantes par $(T_t)_{t \geqslant 0}$, il suffira de raisonner sur $(e^{-\lambda t} T_t)_{t \geqslant 0}$, ce qui revient à rajouter des normes L^p aux normes homogènes que nous allons considérer. Les détails seront laissés au lecteur.

a. *Espaces de Sobolev*

Soit $\alpha \geqslant 0$; on sait classiquement définir A^α (cf. [32]). Si $f \in \mathscr{S} \subset \mathscr{D}(A^\alpha)$, on notera $L^p_\alpha(f)$ la semi-norme de Sobolev $\|A^{\alpha/2} f\|_p$. Puisque $Af = 0$ et $f = \mathscr{S}$ entraîne $f = 0$, il s'agit d'une norme. L'espace de Banach obtenu en complétant $\mathscr{S}$ par rapport à cette norme sera lui aussi noté L^p_α. Cet espace est stable par T_t, $\forall t \geqslant 0$, et, $\forall \beta > 0$, $A^{\beta/2}$ réalise un isomorphisme entre L_α^p et $L_{\alpha+\beta}^p$.

Nous aurons par ailleurs à utiliser une décomposition liée à $(T_t)_{t \geqslant 0}$ de la norme L^p; définissons les semi-normes $L^p(\infty)$ et $L^{p,k}(\mathrm{loc})$, où $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et $k \in \mathbb{N}^*$, par $L^p(\infty)(f) = \|T_1 f\|_p$ et $L^{p,k}(\mathrm{loc})(f) = \|(I - T_1)^k f\|_p$, pour $f \in \mathscr{S}$. Il est clair que, sous les hypothèses qui ont été faites, ce sont des normes. Nous noterons encore $L^p(\infty)$ et $L^{p,k}(\mathrm{loc})$ les espaces de Banach correspondants. On a bien sûr

$$L^{p,k}(\mathrm{loc}) \cap L^p(\infty) = L^p, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [1, +\infty].$$

b. *Espaces de Lipschitz et de Besov*

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ un couple de réels positifs, β un réel vérifiant $\beta > \alpha_1/2$ et $\beta > \alpha_2/2$ (ce qu'on notera $\beta > \alpha/2$), et soient p et q tels que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et $1 \leqslant q \leqslant +\infty$. On définit la semi-norme $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}$ en posant pour $f \in \mathscr{S}$,

$$\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}(f) = \left[\int_0^1 (t^{\beta - \alpha_1/2} \|A^\beta T_t f\|_p)^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} + \left[\int_1^{+\infty} (t^{\beta - \alpha_2/2} \|A^\beta T_t f\|_p)^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}$$

si $q < +\infty$ et

$$\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,\infty}(f) = \sup_{0 < t < 1} t^{\beta - \alpha_1/2} \|A^\beta T_t f\|_p + \sup_{t > 1} t^{\beta - \alpha_2/2} \|A^\beta T_t f\|_p.$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$, $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}$ est bien sûr équivalente à $[\int_0^{+\infty} (t^{\beta - \alpha_1/2} \|A^\beta T_t f\|_p)^q \, dt/t]^{1/q}$ ou $\sup_{t>0} t^{\beta - \alpha_1/2} \|A^\beta T_t f\|_p$, suivant que q est fini ou non. Le premier terme de $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}$ sera noté $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}(\mathrm{loc})$, et le second $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}(\infty)$.

Comme, pour $f \in \mathscr{S}$, $Af = 0$ entraîne $f = 0$ et $t \to T_t f$ est analytique réelle, $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}$, $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}(\mathrm{loc})$ et $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}(\infty)$ sont des normes pour toutes les valeurs admissibles des indices. Nous noterons encore $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}$, $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}(\mathrm{loc})$ et $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}(\infty)$ les espaces de Banach correspondants, que nous appellerons espaces de Besov, espaces de Besov locaux, espaces de Besov à l'infini. L'espace $\Lambda_\alpha^{\infty,\infty}$ sera aussi noté Λ_α, et appelé espace de Lipschitz (de même pour ses versions locale et à l'infini). Toute cette terminologie est justifiée par [26, 23, 3]. Les espaces considérés sont tous stables par $(T_t)_{t \geqslant 0}$.

L'énoncé qui suit jouera un rôle essentiel, en nous permettant de disposer de l'indice β.

PROPOSITION 1. *Si $\alpha/2 < \beta$ et $\alpha/2 < \beta'$, $\Lambda_{\alpha,\beta}^{p,q}$ et $\Lambda_{\alpha,\beta'}^{p,q}$ sont des normes équivalentes.*

Preuve. Supposons que $\beta < \beta'$, $q < +\infty$, et soit $f \in \mathcal{D}$. Comme $(T_t)_{t \geqslant 0}$ est analytique,

$$\|A^{\beta'} T_t f\|_p = \|A^{\beta' - \beta} T_{t/2} A^{\beta} T_{t/2} f\|_p \leqslant C t^{\beta - \beta'} \|A^{\beta} T_{t/2} f\|_p$$

et

$$\begin{aligned}
\Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta'}(f) \leqslant C & \left\{ \left[\int_0^1 (t^{\beta - \alpha_1/2} \|A^{\beta} T_{t/2} f\|_p)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \right. \\
& \left. + \left[\int_1^{+\infty} (t^{\beta - \alpha_2/2} \|A^{\beta} T_{t/2} f\|_p)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \right\} \\
\leqslant C' & \left\{ \left[\int_0^{1/2} (u^{\beta - \alpha_1/2} \|A^{\beta} T_u f\|_p)^q \frac{du}{u} \right]^{1/q} \right. \\
& \left. + \left[\int_{1/2}^{+\infty} (u^{\beta - \alpha_2/2} \|A^{\beta} T_u f\|_p)^q \frac{du}{u} \right]^{1/q} \right\};
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\int_{1/2}^1 (u^{\beta - \alpha_2/2} \|A^{\beta} T_u f\|_p)^q \frac{du}{u} \leqslant K \int_0^1 (u^{\beta - \alpha_1/2} \|A^{\beta} T_u f\|_p)^q \frac{du}{u},$$

avec $K = \sup_{u \in [1/2, 1]} u^{(\alpha_1 - \alpha_2)/2}$. On obtient donc $\Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta'}(f) \leqslant C'' \Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(f)$. Le cas $q = +\infty$ est analogue.

Compte-tenu de cette première étape, il nous suffit, dans l'autre sens, de montrer que si $\alpha/2 < \beta$, $\Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}$ est dominé par $\Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta+1}$. Or, si $f \in \mathcal{D}$, $A^{\beta} T_t f = \int_t^{+\infty} A^{\beta+1} T_s f \, ds$, au sens de l'intégration dans $L^p(X, \xi)$, car $\|A^{\beta} T_t f\|_p \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par analyticité. Donc $\|A^{\beta} T_t f\|_p \leqslant \int_t^{+\infty} \|A^{\beta+1} T_s f\|_p \, ds$, et l'inégalité de Hardy [23, p. 272], convenablement adaptée pour couvrir le cas général $\alpha_1 \neq \alpha_2$, prouve que

$$\Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(f) \leqslant C \Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta+1}(f), \qquad \text{du moins si } q < +\infty.$$

Si $q = +\infty$, posons $M = \Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta+1}(f)$; alors $\|A^{\beta+1} T_s f\|_p \leqslant M s^{-1-\beta+\alpha/2}$, donc $\|A^{\beta} T_t f\|_p \leqslant M \int_t^{+\infty} s^{-1-\beta+\alpha/2} \, ds$, et $\Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(f) \leqslant CM$.

Dorénavant, comme nous considérerons les normes à une équivalence près, nous supprimerons l'indice β dans la notation $\Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}$, et nous choisirons librement un réel dépassant $\alpha_1/2$ et $\alpha_2/2$ dans l'écriture de l'expression correspondante. Notons que cette manœuvre n'est pas possible pour les espaces $\Lambda^{p,q}_{\alpha_1,\beta}(\mathrm{loc})$ et $\Lambda^{p,q}_{\alpha_2,\beta}(\infty)$.

COROLLAIRE. *$\forall \beta > 0$, $A^{\beta/2}$ réalise un isomorphisme entre $\Lambda^{p,q}_{\alpha+\beta}$ et $\Lambda^{p,q}_{\alpha}$. (Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha + \beta$ dénote bien sûr le couple $(\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta)$).*

Preuve. Nous la rédigeons ici dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Le cas général se traite de la même façon. Définissons sur $\mathscr{D}$ une norme Λ par

$$\Lambda(f) = \Lambda_\alpha^{p,q}(A^{\beta/2} f).$$

$\Lambda(f)$ s'écrit

$$\left[\int_0^{+\infty} (t^{\gamma - \alpha/2} \|A^{\gamma+\beta/2} T_t f\|_p)^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}, \qquad \text{avec} \quad \gamma > \frac{\alpha}{2}$$

ou bien encore

$$\left[\int_0^{+\infty} (t^{\gamma+\beta/2 - (\alpha+\beta)/2} \|A^{\gamma+\beta/2} T_t f\|_p)^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}.$$

Autrement dit, elle est équivalente à $\Lambda^{p,q}_{\alpha+\beta}$, ce qu'il fallait prouver.

Il est facile de voir qu'on peut définir sur $\mathscr{D}$ un opérateur $A^{-\beta/2}$, ce qui complète la preuve.

La preuve de la proposition suivante est adaptée de celle du cas classique [23].

PROPOSITION 2. *Les familles d'espaces* $\Lambda_\alpha^{p,q}$ *et* $\Lambda^{p,q}_{\alpha_1,\beta}(\text{loc})$ *sont croissantes en* q.

Preuve. Soit $f \in \mathscr{D}$; posons $\Lambda = \Lambda^{p,q}_{\alpha_1,\beta}(\text{loc})(f)$.

$$\forall t_0, 0 < t_0 < 1, \qquad \int_{t_0/2}^{t_0} t^{(\beta - \alpha_1/2)q - 1} \|A^\beta T_t f\|_p^q \, dt \leqslant \Lambda^q.$$

De plus la fonction $t \mapsto \|A^\beta T_t f\|_p^q$ est décroissante puisque $(T_t)_{t \geqslant 0}$ contracte $L^p(X, \xi)$.

Donc

$$\|A^\beta T_{t_0} f\|_p^q \int_{t_0/2}^{t_0} t^{(\beta - \alpha_1/2)q - 1} \, dt \leqslant \Lambda^q$$

soit

$$C t_0^{\beta - \alpha_1/2} \|A^\beta T_{t_0} f\|_p \leqslant \Lambda, \qquad \forall t_0, 0 < t_0 < 1$$

autrement dit

$$\Lambda^{p,\infty}_{\alpha_1,\beta}(\text{loc})(f) \leqslant \frac{1}{C} \Lambda^{p,q}_{\alpha_1,\beta}(\text{loc})(f),$$

d'où l'on déduit par Hölder

$$\begin{aligned}[\Lambda^{p,r}_{\alpha_1,\beta}(\mathrm{loc})(f)]^r &\leqslant [\Lambda^{p,\infty}_{\alpha_1,\beta}(\mathrm{loc})(f)]^{r-q}\,[\Lambda^{p,q}_{\alpha_1,\beta}(\mathrm{loc})(f)]^q\\ &\leqslant \frac{1}{C^{r-q}}\,[\Lambda^{p,q}_{\alpha_1,\beta}(\mathrm{loc})(f)]^r \qquad \text{si} \quad r \geqslant q.\end{aligned}$$

S'agissant de $\Lambda^{p,q}_\alpha$ on prouve de la même façon que

$$Ct^{\beta-\alpha_1/2}\,\|A^\beta T_t f\|_p \leqslant \Lambda^{p,q}_\alpha(f), \qquad \forall t,\ 0<t<1,$$

et

$$Ct^{\beta-\alpha_2/2}\,\|A^\beta T_t f\|_p \leqslant \Lambda^{p,q}_\alpha(f), \qquad \forall t>2,$$

et on termine en remarquant que

$$\sup_{t\in[1,2]} t^{\beta-\alpha_2/2}\,\|A^\beta T_t f\|_p \leqslant C'\,\|A^\beta T_1 f\|_p \leqslant C'\Lambda^{p,\infty}_{\alpha_1,\beta}(\mathrm{loc})(f).$$

Nous allons maintenant voir que les espaces que nous venons d'introduire (où α est un couple) s'expriment comme somme ou intersection des espaces de Besov habituellement considérés (où α est un réel). Ceci nous permettra d'exprimer nos résultats en termes plus clairs, mais nous les obtiendrons en utilisant l'expression initiale de $\Lambda^{p,q}_\alpha$ à l'aide de $\Lambda^{p,q}_{\alpha_1,\beta}(\mathrm{loc})$ et $\Lambda^{p,q}_{\alpha_2,\beta}(\infty)$.

Proposition 3. *Soit* $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$.

$$\Lambda^{p,q}_\alpha=\begin{cases}\Lambda^{p,q}_{\alpha_1}\cap\Lambda^{p,q}_{\alpha_2} & si \quad \alpha_1\geqslant\alpha_2\\ \Lambda^{p,q}_{\alpha_1}+\Lambda^{p,q}_{\alpha_2} & si \quad \alpha_1\leqslant\alpha_2\end{cases}$$

(*on écrit par exemple* $\Lambda^{p,q}_{\alpha_1}$ *pour* $\Lambda^{p,q}_{(\alpha_1,\alpha_1)}$).

Preuve. Il est clair que, si $\alpha\leqslant\alpha'<2\beta$, $\Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(\mathrm{loc})\supset\Lambda^{p,q}_{\alpha',\beta}(\mathrm{loc})$ et $\Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(\infty)\subset\Lambda^{p,q}_{\alpha',\beta}(\infty)$. Donc, si $\alpha_1\geqslant\alpha_2$,

$$f\in\Lambda^{p,q}_{(\alpha_1,\alpha_2)}\Leftrightarrow f\in\Lambda^{p,q}_{\alpha_1,\beta}(\mathrm{loc})\subset\Lambda^{p,q}_{\alpha_2,\beta}(\mathrm{loc}) \quad \text{et} \quad f\in\Lambda^{p,q}_{\alpha_2,\beta}(\infty)\subset\Lambda^{p,q}_{\alpha_1,\beta}(\infty),$$

(où l'on choisit $\beta>\alpha_1/2$)

$$\Leftrightarrow f\in\Lambda^{p,q}_{\alpha_1}\cap\Lambda^{p,q}_{\alpha_2}.$$

Le cas $\alpha_1\leqslant\alpha_2$ résultera du fait qu'alors $\Lambda^{p,q}_{\alpha_1}$ et $\Lambda^{p,q}_{\alpha_2}$ sont inclus dans $\Lambda^{p,q}_\alpha$ et du:

LEMME. *Soit* $\alpha > 0$ *et* $f \in \mathscr{D}$; *alors*

$$\exists \beta > \frac{\alpha}{2} \qquad \text{tel que} \qquad f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(\mathrm{loc}) \Rightarrow f - T_1 f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha}.$$

$$\forall \beta > \frac{\alpha}{2}, \qquad f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(\infty) \Rightarrow T_1 f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha}.$$

Preuve du Lemme. Supposons que $f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(\mathrm{loc})$. Il est clair que $f - T_1 f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(\mathrm{loc})$. Reste à montrer que $f - T_1 f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(\infty)$. Si $q < +\infty$,

$$\int_1^{+\infty} (t^{\beta - \alpha/2} \|A^\beta T_t(I - T_1) f\|_p)^q \frac{dt}{t}$$

$$\leqslant \int_1^{+\infty} \left[t^{\beta - \alpha/2} \left(\int_0^1 \|A^{\beta+1} T_{t+s} f\|_p \, ds \right) \right]^q \frac{dt}{t}$$

$$\leqslant \int_1^{+\infty} \left[t^{\beta - \alpha/2} \|A^\gamma T_t\|_{p,p} \left(\int_0^1 \|A^{\beta+1-\gamma} T_s f\|_p \, ds \right) \right]^q \frac{dt}{t},$$

où $\quad 0 < \gamma < \beta + 1$,

$$\leqslant C \left(\int_1^{+\infty} t^{q(\beta - \alpha/2 - \gamma) - 1} \, dt \right) \left(\int_0^1 \|A^{\beta+1-\gamma} T_s f\|_p \, ds \right)^q$$

$$\leqslant C' \left(\int_1^{+\infty} t^{q(\beta - \alpha/2 - \gamma) - 1} \, dt \right) \left(\int_0^1 s^{-\beta - 1 + \gamma + \alpha/2} \, ds \right)^q.$$

La dernière inégalité provient du fait que $f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha}(\mathrm{loc}) \subset \Lambda^{p,\infty}_{\alpha}(\mathrm{loc})$ d'après la proposition 2. Enfin, si l'on choisit γ tel que $\beta - \alpha/2 < \gamma$, les deux intégrales convergent.

La preuve est similaire si $q = +\infty$.

Supposons maintenant que $f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(\infty)$. Si $q < +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} [t^{\beta - \alpha/2} \|A^\beta T_t(T_1 f)\|_p]^q \frac{dt}{t}$$

$$= \int_1^{+\infty} [(u-1)^{\beta - \alpha/2} \|A^\beta T_u f\|_p]^q \frac{du}{u-1}$$

$$\leqslant \int_1^{+\infty} [u^{\beta - \alpha/2} \|A^\beta T_u f\|_p]^q \frac{du}{u}$$

si β est assez grand pour que $(\beta - \alpha/2)\, q - 1$ soit positif.

Le cas $q = +\infty$ ne présente pas plus de difficulté.

Notons au passage que le même calcul montre $T_1 f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha} \Rightarrow \exists \beta > \alpha$ tel que $f \in \Lambda^{p,q}_{\alpha,\beta}(\infty)$.

L'hypothèse "$(T_t)_{t\geqslant 0}$ sous-markovien symétrique," que nous avons faite pour des raisons de commodité et en vue des applications, est inutile pour définir des espaces de Lipschitz et de Sobolev liés à un semi-groupe d'opérateurs: analytique borné sur tous les L^p suffit. On pourrait même s'affranchir de cette hypothèse en remplaçant A^kT_t par $(Id-T_t)^k$ (cf. [3]), mais elle nous sera utile dans la suite.

2. Le Théorème de Taibleson

Les résultats que nous allons présenter dans ce paragraphe sont indépendants de toute hypothèse de dimension sur $(T_t)_{t\geqslant 0}$. Nous supposerons simplement que $(T_t)_{t\geqslant 0}$ est sous-markovien symétrique sur $L^2(X, \xi)$, mais nous verrons tout à l'heure que cette hypothèse peut être affaiblie.

Nous n'avons pas cru bon d'expliciter le cas général des espaces de Besov $\Lambda_\alpha^{p,q}$, où α est un couple. Il peut être déduit de l'énoncé qui suit à l'aide de la proposition 3 du §1.

La preuve que nous présentons est l'adaptation à un cadre abstrait de celle de Stein pour $\mathbb{R}^n$ [23]. Nous la donnons toutefois in extenso, faute de pouvoir isoler les modifications nécessaires.

Théorème. *Soit* $\alpha\geqslant 0$,

$$\Lambda_\alpha^{p,p\wedge 2}\subset L_\alpha^p\subset\Lambda_\alpha^{p,p\vee 2}\qquad si\quad 1<p<+\infty$$

et

$$\Lambda_\alpha^{p,1}\subset L_\alpha^p\subset\Lambda_\alpha^{p,\infty}\qquad si\quad p=1\ ou\ +\infty.$$

Preuve. Elle repose sur l'utilisation des fonctions de Littlewood–Paley

$$\mathscr{G}_p(f)(x)=\left[\int_0^{+\infty}(t\,|AT_tf(x)|)^p\frac{dt}{t}\right]^{1/p}\qquad \text{si}\quad 1\leqslant p<+\infty$$

et

$$\mathscr{G}_\infty(f)(x)=\sup_{t>0}t\,|AT_tf(x)|.$$

Comme on a prouvé au §1 que les opérateurs $A^{\beta/2}$ décalent aussi bien l'échelle des espaces de Besov que celle des espaces de Sobolev, il suffit de considérer le cas $\alpha=2$.

(i) Montrons que, si $2\leqslant p<+\infty, L_2^p\subset\Lambda_2^{p,p}$, autrement dit $\Lambda_2^{p,p}(f)\leqslant C\,\|Af\|_p, \forall f\in\mathscr{D}$.

On a

$$\|\mathscr{G}_p(Af)\|_p=\left[\int_X\left(\int_0^{+\infty} t^{p-1}\,|A^2T_tf(x)|^p\,dt\right)d\xi(x)\right]^{1/p}$$

$$=\left(\int_0^{+\infty} t^{p-1}\,\|A^2T_tf\|_p^p\,dt\right)^{1/p}=A_2^{p,p}(f).$$

D'autre part, comme $p\geqslant 2$,

$$[\mathscr{G}_p(f)(x)]^p\leqslant[\mathscr{G}_2(f)(x)]^2\times[\mathscr{G}_\infty(f)(x)]^{p-2},$$

et Hölder donne

$$\|\mathscr{G}_p(f)\|_p\leqslant\|\mathscr{G}_2(f)\|_p^{2/p}\times\|\mathscr{G}_\infty(f)\|_p^{1-2/p}.$$

Reste à montrer que

$$(\alpha)\quad \|\mathscr{G}_2(f)\|_p\leqslant C\,\|f\|_p$$

$$(\beta)\quad \|\mathscr{G}_\infty(f)\|_p\leqslant C'\,\|f\|_p.$$

Posons

$$g_k(f)(x)=\left[\int_0^{+\infty}(t^k\,|A^kT_tf(x)|)^p\,\frac{dt}{t}\right]^{1/2}.$$

On sait [24, 16] que, comme $(T_t)_{t\geqslant 0}$ est sous-markovien symétrique,

$$\|g_k(f)\|_p\leqslant K\,\|f\|_p,\qquad \forall k\in\mathbb{N}^*\quad\text{et}\quad\forall p,\ 1<p<+\infty.$$

Or $\mathscr{G}_2(f)=g_1(f)$, donc (α) est démontré. D'autre part, $\int_0^t s^2A^2T_sf\,ds=-t^2AT_tf+2\int_0^t sAT_sf\,ds$, $f\in\mathscr{D}$. Donc

$$t\,|AT_tf(x)|\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t s^2\,|A^2T_sf(x)|\,ds+\frac{2}{t}\int_0^t s\,|AT_sf(x)|\,ds$$

$$\leqslant\frac{1}{t}\left(\int_0^t s\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t s^3\,|A^2T_sf(x)|^2\,ds\right)^{1/2}$$

$$+\frac{2}{t}\left(\int_0^t s\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t s\,|AT_sf(x)|^2\,ds\right)^{1/2}$$

et

$$\mathscr{G}_\infty(f)(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\,g_2(f)(x)+\sqrt{2}\,g_1(f)(x).$$

Ceci démontre (β).

(ii) Montrons que, pour $1 < p \leqslant 2$, $L_2^p \subset \Lambda_2^{p,2}$. Pour $f \in \mathscr{D}$,

$$\Lambda_2^{p,2}(f) = \left(\int_0^{+\infty} t \, \|A^2 T_t f\|_p^2 \, dt\right)^{1/2}$$

$$= \left[\left(\int_0^{+\infty} \left[\int_X |A^2 T_t f(x)|^p \, d\xi(x)\right]^r t \, dt\right)^{1/r}\right]^{1/p}, \quad \text{où} \quad r = \frac{2}{p} \geqslant 1.$$

Donc

$$\Lambda_2^{p,2}(f) \leqslant \left[\int_X \left(\int_0^{+\infty} |A^2 T_t f(x)|^{pr} \, t \, dt\right)^{1/r} d\xi(x)\right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_X \left(\int_0^{+\infty} t \, |A^2 T_t f(x)|^2 \, dt\right)^{p/2} d\xi(x)\right]^{1/p}$$

$$= \|g_1(Af)\|_p \leqslant K \, \|Af\|_p.$$

(iii) Montrons que, pour $2 \leqslant p < +\infty$, $\Lambda_2^{p,2} \subset L_2^p$. Pour $f \in \mathscr{D}$,

$$\|g_1(Af)\|_p = \left[\left[\int_X \left(\int_0^{+\infty} t \, |A^2 T_t f(x)|^2 \, dt\right)^{p/2} d\xi(x)\right]^{2/p}\right]^{1/2}$$

$$\leqslant \left[\int_0^{+\infty} t \left[\int_X |A^2 T_t f(x)|^p \, d\xi(x)\right]^{2/p} dt\right]^{1/2} \qquad \text{car} \quad \frac{p}{2} \geqslant 1$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} t \, \|A^2 T_t f\|_p^2 \, dt\right)^{1/2} = \Lambda_2^{p,2}(f).$$

Or $\|g_1(f)\|_p$ domine $\|f\|_p$, puisque, avec les notations de [24], $E_0 = 0$ (cela résulte de la supposition que nous avons faite que $Af = 0$ et $f \in \mathscr{D} \Rightarrow f = 0$).

(iv) Montrons que, pour $1 < p \leqslant 2$, $\Lambda_2^{p,p} \subset L_2^p$, c'est-à-dire que $\Lambda_2^{p,p}(f) \geqslant 1/C \, \|f\|_p$, $\forall f \in \mathscr{D}$.

$\forall f \in \mathscr{D}, \forall x \in X$, $\mathscr{G}_2(f)(x) \leqslant \mathscr{G}_p(f)(x)^{p/2} \times \mathscr{G}_\infty(f)(x)^{1-p/2}$, puisque $p/2 \leqslant 1$, et Hölder donne $\|\mathscr{G}_2(f)\|_p \leqslant \|\mathscr{G}_p(f)\|_p^{p/2} \, \|\mathscr{G}_\infty(f)\|_p^{1-p/2}$. Donc $\|\mathscr{G}_p(f)\|_p^{p/2} \geqslant \|g_1(f)\|_p \, \|\mathscr{G}_\infty(f)\|_p^{p/2-1} \geqslant (1/C) \, \|g_1(f)\|_p \, \|f\|_p^{p/2-1}$ d'après le (β) du (i).

D'autre part $\|g_1(f)\|_p \geqslant (1/C') \, \|f\|_p$ (cf. (iii)), et $\|\mathscr{G}_p(Af)\|_p$ vaut $\Lambda_2^{p,p}(f)$ (cf. (i)).

(v) Soit maintenant p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Comme $(T_t)_{t \geqslant 0}$ est analytique sur $L^p(X, \xi)$, $t \, \|A^2 T_t f\|_p \leqslant C \, \|Af\|_p$, $\forall t > 0$.

D'autre part

$$Af = \int_0^{+\infty} A^2 T_t f \, dt, \text{ et donc } \|Af\|_p \leqslant \int_0^{+\infty} t \, \|A^2 T_t f\|_p \frac{dt}{t}.$$

Ceci montre que, $\forall p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\Lambda_\alpha^{p,1} \subset L_\alpha^p \subset \Lambda_\alpha^{p,\infty}$.

La proposition 2 du §1 montre que ces inclusions sont, dans le cas où $p \in \,]1, +\infty[$, plus faibles que celles que nous avons précédemment démontrées. C'est pourquoi nous ne les énonçons que pour $p = 1$ ou $+\infty$.

Rappelons que le cas de $\mathbb{R}^n$ muni du semi-groupe de Poisson montre que l'énoncé du théorème de Taibleson est optimal [23].

Nous l'avons dit, il n'est pas nécessaire de supposer ici $(T_t)_{t \geqslant 0}$ sous-markovien symétrique: il suffit en effet de disposer de l'équivalence des normes L^p de f et $g_1(f)$. C'est le cas par exemple si $(T_t)_{t \geqslant 0}$ est contractant sur les $L^p(X, \xi)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et auto-adjoint sur $L^2(X, \xi)$ [4, 8].

3. Plongements liés à la dimension entre espaces de Sobolev et espaces de Lipschitz

Dans ce paragraphe, nous reprenons les hypothèses faites sur $(T_t)_{t \geqslant 0}$ au §1.

Nous dirons que le semi-groupe $(T_t)_{t \geqslant 0}$ a pour dimension locale $d \geqslant 0$ s'il existe C tel que $\|T_t f\|_\infty \leqslant C t^{-d/2} \|f\|_1$, $\forall t$, $0 < t < 1$, et $\forall f \in \mathscr{D}$, qu'il a pour dimension à l'infini D s'il existe C tel que $\|T_t f\|_\infty \leqslant C t^{-D/2} \|f\|_1$, $\forall t > 1$, $\forall f \in \mathscr{D}$ et qu'il a pour dimension à l'infini $+\infty$ si ceci se produit $\forall D \geqslant 0$. Si $(T_t)_{t \geqslant 0}$ a pour dimension locale d, il a aussi pour dimension locale tous les réels $d' \geqslant d$. Il a pour dimension locale 0 si et seulement si l'espace mesuré (X, ξ) est discret. S'il a pour dimension à l'infini D, il a aussi pour dimension à l'infini tous les réels D' vérifiant $0 \leqslant D' \leqslant D$. Un semi-groupe peut fort bien ne pas avoir de dimensions, ne serait-ce que parce qu'il peut ne pas être régularisant.

Nous nous appuierons sur les deux résultats suivants, dûs à Varopoulos:

Théorème A [28]. *$(T_t)_{t \geqslant 0}$ a pour dimension locale d si et seulement si $\forall \alpha$, p vérifiant $1 < p < +\infty$ et $0 < \alpha p < d$, $\exists C$ tel que*

$$\|f\|_q \leqslant C(\|A^{\alpha/2} f\|_p + \|f\|_p), \qquad \forall f \in \mathscr{D}, \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}.$$

Il suffit en fait que l'inégalité ait lieu pour une valeur des indices pour qu'elle ait lieu pour les autres.

THÉORÈME B [31]. *Si $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a pour dimension à l'infini D, alors $\forall\alpha$, p vérifiant $1<p<+\infty$ et $0<\alpha p<D$, $\exists C$ tel que*

$$\|f\|_q \leqslant C(\|A^{\alpha/2}f\|_p+\|f\|_\infty), \qquad \forall f\in\mathcal{S}, \quad avec \quad \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{D}.$$

Pour une amélioration du théorème B, voir [5].

Nous recourrons aussi souvent aux estimations suivantes: si $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a pour dimension locale d (resp. pour dimension à l'infini D), si $\beta>0$ et $q\geqslant p$,

$$\|A^\beta T_t\|_{p\to q}\leqslant Ct^{-\beta-(1/p-1/q)d/2} \qquad \text{pour} \quad 0<t<1$$

(resp. $t^{-\beta-(1/p-1/q)D/2}$ pour $t>1$). Ceci s'obtient, à partir des définitions des dimensions et de l'analyticité de $(T_t)_{t\geqslant 0}$, par interpolation.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer quatre énoncés de plongement de Sobolev, suivant que l'on a une dimension locale ou bien une dimension à l'infini, et que l'on cherche à plonger L^p_α dans un espace de Lebesgue ou bien un espace de Lipschitz. Par souci de concision, nous ne détaillerons pas le cas $p=1$, il suffit de faire intervenir des espaces L^q-faible (cf. [23, 30]).

PROPOSITION 1. *Si $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a pour dimension locale d, $\forall\alpha>0$ et $1<p<+\infty$,*

$$L^p_\alpha \to L^{q,k}(\mathrm{loc}), \qquad avec \begin{cases} q\in[p,+\infty] & si \quad \alpha p\geqslant d \\ q\in\left[p,\dfrac{dp}{d-\alpha p}\right] & si \quad \alpha p<d, \end{cases}$$

et $k\in\mathbb{N}^*$, $k\geqslant\alpha/2$.

Preuve. Supposons d'abord $0<\alpha\leqslant 2$; on écrit $I-T_1=\int_0^1 AT_t\,dt$, et donc, pour $q\geqslant p$,

$$\begin{aligned}\|(I-T_1)f\|_q &\leqslant \int_0^1 \|A^{1-\alpha/2}T_t\|_{p\to q}\,dt\,\|A^{\alpha/2}f\|_p \\ &\leqslant C\left(\int_0^1 t^{-1+\alpha/2-d/2(1/p-1/q)}\,dt\right)\|A^{\alpha/2}f\|_p.\end{aligned}$$

Si $\alpha p\geqslant d$, l'intégrale ci-dessus est convergente pour tout $q\in[p,+\infty]$, et si $\alpha p<d$, elle est convergente pour $q\in[p,dp/(d-\alpha p)[$.

Enfin, si $q = dp/(d - \alpha p) > 0$, d'après le théorème A,

$$\|f\|_q \leqslant C(\|A^{\alpha/2} f\|_p + \|f\|_p),$$

donc

$$\|(I - T_1) f\|_q \leqslant C(\|A^{\alpha/2} f\|_p + \|(I - T_1) f\|_p),$$

et comme le raisonnement précédent montré que $\|(I - T_1) f\|_p \leqslant C\|A^{\alpha/2} f\|_p$, on a bien à nouveau $\|(I - T_1) f\|_q \leqslant C\|A^{\alpha/2} f\|_p$.

Nous avons montré le plongement $L^p_\alpha \to L^{q,1}(\text{loc})$, donc $L^p_\alpha \to L^{q,k}(\text{loc})$, $k \in \mathbb{N}^*$, dans tous les cas annoncés, pour $0 < \alpha \leqslant 2$. On lève cette dernière restriction en itérant k fois l'opérateur $(I - T_1)\, A^{-(\alpha/2)k}$, avec $k \geqslant \alpha/2$.

Plus précisément, on définit une suite p_α, $\alpha = 0, ..., k$ par $p_0 = p$ et

$$\frac{1}{p_\alpha} - \frac{1}{p_{\alpha+1}} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \qquad \text{donc} \quad p_k = q.$$

Comme $1/p - 1/q \leqslant \alpha/d$, on a $1/p_\alpha - 1/p_{\alpha+1} \leqslant \alpha/kd$. Donc, d'après le cas $0 < \alpha \leqslant 2$, on a $(I - T_1)\, A^{-\alpha/2k}$: $L^{p_\alpha} \to L^{p_{\alpha+1}}$, $\alpha = 0, ..., k$, et finalement $(I - T_1)^k\, A^{-\alpha/2}$: $L^p \to L^q$.

Corollaire. *Si $(T_t)_{t \geqslant 0}$ a pour dimension locale d, $\forall \alpha > 0$, $1 < p < +\infty$ et $1 \leqslant r \leqslant +\infty$,*

$$L^p_\alpha \cap L^r \to L^q \qquad \text{où} \begin{cases} q \in [p \vee r, +\infty] & \text{si} \quad \alpha p \geqslant d \\ q \in \left[p \vee r, \dfrac{dp}{d - \alpha p}\right] & \text{si} \quad \alpha p < d. \end{cases}$$

Preuve. Si $f \in L^r$, $T_1 f \in L^q$ puisque $q \geqslant 2$. Autrement dit, $f \in L^q(\infty)$. On conclut à l'aide du théorème précédent.

Proposition 2. *Si $(T_t)_{t \geqslant 0}$ a pour dimension à l'infini D, $\forall \alpha > 0$ et $1 < p < +\infty$,*

$$L^p_\alpha \to L^q(\infty), \qquad \text{si} \quad \alpha p < D \quad \text{et} \quad q \in \left[\frac{Dp}{D - \alpha p}, +\infty\right].$$

Preuve. Nous allons d'abord traiter le cas $q > Dp/(D - \alpha p)$, en raisonnant par récurrence sur $[\alpha/2]$.

Supposons tout d'abord que $0<\alpha<2$,

$$T_1=\int_1^{+\infty} AT_t\,dt,$$

donc

$$\|T_1\|_q\leqslant\left(\int_1^{+\infty}\|A^{1-\alpha/2}T_t\|_{p\to q}\,dt\right)\times\|A^{\alpha/2}f\|_p,$$

or

$$\|A^{1-\alpha/2}T_t\|_{p\to q}\leqslant Ct^{-1+\alpha/2-(1/p-1/q)D/2}$$

et l'intégrale converge dès que

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{D}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)<0.$$

Supposons maintenant la propriété vraie pour $[\alpha/2]\leqslant k$, et soit $k+1\leqslant\alpha/2<k+2$. Par intégrations par parties

$$T_1=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}A^iT_1+\frac{1}{k!}\int_1^{+\infty}t^kA^{k+1}T_t\,dt,\qquad\text{donc}$$

$$\|T_1f\|_q\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}\|A^iT_1f\|_q+\frac{1}{k!}\int_1^{+\infty}t^k\|A^{k+1}T_tf\|_q\,dt.$$

Or, $\forall i\in\{1,...,k\}$, $\|A^iT_1f\|_q=\|T_1(A^if)\|_q\leqslant C\|A^{\alpha/2-i}(A^if)\|_p$. En effet, si $\beta/2=\alpha/2-i$, $[\beta/2]\leqslant k$, $0<\beta p<D$ donc $Dp/(D-\alpha p)\geqslant Dp/(D-\beta p)$, et l'hypothèse de récurrence s'applique.

Enfin

$$\int_1^{+\infty}t^k\|A^{k+1}T_tf\|_q\,dt\leqslant\left(\int_1^{+\infty}t^k\|A^{k+1-\alpha/2}T_tf\|_{p\to q}\,dt\right)\times\|A^{\alpha/2}f\|_p,$$

et comme $t^k\|A^{k+1-\alpha/2}T_t\|_{p\to q}\leqslant Ct^{-1+\alpha/2-(1/p-1/q)D/2}$, l'intégrale converge pour $q>Dp/(D-\alpha p)$. Posons maintenant $q=Dp/(D-\alpha p)$. D'après le théorème B, $\exists C$ tel que $\|f\|_q\leqslant C(\|A^{\alpha/2}f\|_p+\|f\|_\infty)$, donc $\|T_1f\|_p\leqslant C(\|A^{\alpha/2}f\|_p+\|T_1f\|_\infty)$, et il reste à constater que $\|T_1f\|_\infty\leqslant C\|A^{\alpha/2}f\|_p$, ce qui résulte du cas précédemment traité.

Remarque. Si $(T_t)_{t\geqslant 0}$ est de dimension (d,D), avec $d<D$, et si $n\in\,]d,D[$, la théorie de Hardy–Littlewood Sobolev développée par Varopoulos [30] montre que $L^1_\alpha\to L^q$-faible, avec $1/q=1/p-\alpha/n$. Par interpolation (il faut avoir recours au théorème de [25, p. 184], puisqu'on

part du même espace), on a donc $L^1_\alpha \to L^q$, $\forall q \in]Dp/(D-\alpha p), dp/(d-\alpha p)[$. Ceci est notable, car, dans $\mathbb{R}^n$, L^1_α ne se plonge jamais dans un espace L^q.

PROPOSITION 3. *Si $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a pour dimension locale d, $\forall\alpha$, p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et $\alpha p \geqslant d$, $L^p_\alpha \to \Lambda_{\alpha-d/p,\beta}(\mathrm{loc})$, pour $\beta > \alpha/2$.*

Preuve. Soit $f \in \mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\alpha-d/p,\beta}(\mathrm{loc})(f) &= \sup_{0<t<1} t^{\beta-\alpha/2+d/2p} \|A^\beta T_t f\|_\infty \\
&\leqslant \sup_{0<t<1} t^{d/2p} \|T_{t/2}\|_{p\to\infty}\, t^{\beta-\alpha/2} \\
&\quad \times \|A^{\beta-\alpha/2} T_{t/2}\|_{p\to p} \|A^{\alpha/2} f\|_p \\
&\leqslant C \|A^{\alpha/2} f\|_p.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 4. *Si $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a pour dimension à l'infini D, si $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, si $T_{1/2}(L^p) \subset L^\infty$, et si $\alpha p \geqslant D$,*

$$L^p_\alpha \to \Lambda_{\alpha-D/p,\beta}(\infty), \qquad \textit{pour} \quad \beta > \alpha/2.$$

Preuve. Analogue à celle de la proposition 3, en remarquant que $\sup_{1/2<t<1} t^{d/2p} \|T_t\|_{p\to\infty}$ est fini.

On peut ici, comme dans [7], se poser la question des réciproques. De fait, la preuve du théorème 2 de [7] s'adapte facilement pour donner les:

PROPOSITION 3'. *Si $L^p_\alpha \to \Lambda_{\alpha-d/p,\beta}(\mathrm{loc})$, pour une valeur des indices comme ci-dessus, et si $T_1(L^1) \subset L^\infty$ alors $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a pour dimension locale d.*

et

PROPOSITION 4'. *Si $L^p_\alpha \to \Lambda_{\alpha-D/p,\beta}(\infty)$, pour une valeur des indices comme ci-dessus, alors $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a pour dimension à l'infini D.*

On peut préciser les plongements des propositions 3 et 4, et accessoirement leur donner une autre preuve, dans le cas où $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a deux demi-dimensions, en utilisant le théorème de Taibleson et un nouvel analogue d'une proposition classique sur les espaces de Besov [23, p. 161]:

PROPOSITION 5. *Si $(T_t)_{t\geqslant 0}$ est de dimension (d, D),*

$$\Lambda^{p,q}_\alpha \to \Lambda^{p',q}_{\alpha'} \qquad \textit{où} \quad 1 \leqslant p, q \leqslant +\infty, \quad \alpha \geqslant \alpha' \geqslant 0$$

et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2)$ avec $\alpha_1 - d/p = \alpha'_1 - d/p'$ et $\alpha_2 - D/p = \alpha'_2 - D/p'$.

La preuve est une adaptation facile de celle du cas classique. On traite le cas général $d \neq D$ en procédant comme au §1, proposition 1.

Une version purement locale de la proposition 5 se démontre de façon identique. Pour avoir une version "à l'infini," il semble nécessaire de faire en outre une hypothèse de dimension locale.

En tout cas, si $(T_t)_{t \geq 0}$ est de dimension (d, D), $L^p_\alpha \to \Lambda^{p,\infty}_\alpha \to \Lambda_{(\alpha - d/p, \alpha - D/p)}$, d'après le §2 et la proposition précédente.

On peut bien sûr utiliser aussi le théorème de Taibleson et les propositions 1 à 4 de ce paragraphe pour obtenir des plongements du type $\Lambda^{p, p \wedge 2}_\alpha \to L^q$; on peut aussi les obtenir directement, au moins sous une forme faible (cf. [6]).

Signalons que la seule hypothèse essentielle sur $(T_t)_{t \geq 0}$ dans ce paragraphe et le suivant, est celle d'analyticité; pour s'en convaincre, voir [5, 7].

4. Plongements dans L^∞

La proposition 1 du §3 indique en particulier que, si $(T_t)_{t \geq 0}$ a pour dimension locale d et si $\alpha p \geq d$, L^p_α se plonge dans $L^{\infty,k}(\mathrm{loc})$, pour k convenable. D'autre part, $T_1(L^q) \subset L^\infty$, $\forall q \geq 1$, autrement dit $L^q \to L^\infty(\infty)$. Il en résulte:

Proposition 1. *Si $(T_t)_{t \geq 0}$ a pour dimension locale d et si $\alpha p \geq d$,*

$$L^p_\alpha \cap L^q \to L^\infty, \qquad \forall q \geq 1.$$

(On peut en fait remplacer L^∞ dans l'énoncé précédent par L^r, où $r \in [p \vee q, +\infty]$.

Comme par ailleurs $L^p_\alpha \to \Lambda_{\alpha - d/p, \beta}(\mathrm{loc})$, si $\alpha p > d$, pour β convenable, on peut se demander si $L^q \cap \Lambda_{\alpha - d/p, \beta}(\mathrm{loc}) \to L^\infty$. C'est bien le cas, comme le montre la:

Proposition 2. *Si $(T_t)_{t \geq 0}$ a une dimension locale, $L^q \cap \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathrm{loc}) \to L^\infty$, $\forall \alpha > 0$ et $q \geq 1$, pour $\beta > \alpha/2$ convenable.*

Preuve. Il suffit de remarquer comme ci-dessus que $L^q \to L^\infty(\infty)$, et de montrer le

Lemme. $\forall \alpha$, $\exists \beta > \alpha/2$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$ *tels que*

$$\Lambda^{r,\infty}_{\alpha,\beta}(\mathrm{loc}) \to L^{r,k}(\mathrm{loc}), \qquad \forall r \geq 1.$$

Preuve du lemme. Soit $f \in \mathscr{D}$,

$$\|(I-T_1)^k f\|_r \leqslant \int_0^1 \cdots \int_0^1 \|A^k T_{t_1+\cdots+t_k} f\|_r \, dt_1 \cdots dt_k$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{k-1} \left(\int_0^1 \|A^{1-\gamma} T_{t_i}\|_{r \to r} \, dt_i \right) \times \int_0^1 \|A^{\beta} T_{t_k} f\|_r \, dt_k$$

avec $1+\gamma(k-1)=\beta$, et $0<\gamma<1$. Donc $\|(I-T_1)^k f\|_r \leqslant C(\int_0^1 t^{\alpha/2-\beta}\, dt)$ $\Lambda^{r,\infty}_{\alpha,\beta}(\mathrm{loc})(f)$.

Il suffit alors de choisir $\max(\alpha/2, 1) < \beta < \alpha/2+1$ et $k>\beta$.

Notons que ce lemme ne fait intervenir aucune hypothèse de dimension sur $(T_t)_{t\geqslant 0}$. La proposition 2 est d'ailleurs vraie dès que $(T_t)_{t\geqslant 0}$ est régularisant.

Nous allons maintenant préciser la proposition 1, dans le cas où $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a une dimension n. Pour le cas de $\mathbb{R}^n$, voir [9].

PROPOSITION 1'. *Si $(T_t)_{t\geqslant 0}$ est de dimension n, $\forall p, q \geqslant 1$, $\forall \alpha$ vérifiant $\alpha p > n$, $L^p_\alpha \cap L^q \to L^\infty$, et $\forall f \in L^p_\alpha \cap L^q$, $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_q^\theta \|A^{\alpha/2} f\|_p^{1-\theta}$, avec*

$$\theta = \frac{\alpha - n/p}{\alpha + n(1/q - 1/p)}.$$

Preuve. Supposons d'abord $0<\alpha\leqslant 2$. Soit $f \in \mathscr{D}$. Ecrivons

$$f = T_t f - (T_t f - f)$$

$$= T_t f + \int_0^t A T_s f \, ds.$$

On a

$$\|f\|_\infty \leqslant \|T_t f\|_\infty + \int_0^t \|A T_s f\|_\infty \, ds$$

$$\leqslant C t^{-n/2q} \|f\|_q + \int_0^t \|A^{1-\alpha/2} T_s\|_{p \to \infty} \|A^{\alpha/2} f\|_p \, ds$$

$$\leqslant C t^{-n/2q} \|f\|_q + C' \left(\int_0^t s^{-1+\alpha/2-n/2p} \, ds \right) \|A^{\alpha/2} f\|_r \, ds,$$

donc

$$\|f\|_\infty \leqslant C t^{-n/2q} \|f\|_q + C'' t^{1/2(\alpha - n/p)} \|A^{\alpha/2} f\|_p, \forall t > 0.$$

Or, si $a, b, \lambda, \mu > 0$, $\inf_{t>0} at^{-\lambda} + bt^{\mu} = C_{\lambda,\mu} a^{\mu/(\lambda+\mu)} b^{\lambda/(\lambda+\mu)}$. Donc $\|f\|_\infty \leqslant C \|f\|_q^{\theta} \|A^{\alpha/2} f\|_p^{1-\theta}$, où θ a la valeur annoncée. Pour s'affranchir de la restriction $0 < \alpha \leqslant 2$ on choisit un entier $k \geqslant \alpha/2$ et on utilise la formule

$$f = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i}{i!} A^i T_t f + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t s^{k-1} A^k T_s f \, ds,$$

qui s'obtient en intégrant par parties.

Plus généralement, si $r \geqslant p \vee q$, et si $(T_t)_{t \geqslant 0}$ est de dimension n, on peut exprimer le plongement $L_\alpha^p \cap L^q \to L^r$, pour $\alpha p > n$, par une inégalité produit.

5. Le Théorème de Herz–Bernstein

On suppose dans ce paragraphe que X est un groupe localement compact unimodulaire et ξ sa mesure de Haar. L'algèbre de Wiener de X peut être définie par

$$A(X) = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n * \psi_n \mid \varphi_n, \psi_n \in L^2(X, \xi), \sum_{n=1}^{+\infty} \|\varphi_n\|_2 \, \|\psi_n\|_2 < +\infty \right\}.$$

Si X est abélien, $A(X)$ est l'algèbre des transformées de Fourier de fonctions de $L^1(X, \xi)$.

Un théorème de S. Bernstein [2] affirme que si une fonction périodique réelle de la variable réelle est lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{2} + \varepsilon$, la série de ses coefficients de Fourier est sommable. C'est C. Herz [13] qui a énoncé et démontré la généralisation de ce théorème à $\mathbb{R}^n$: l'espace de Besov classique $A_{n/2}^{2,1}(\mathbb{R}^n)$ se plonge dans $A(\mathbb{R}^n)$. Nous allons montrer que la notion de dimension d'un semi-groupe d'opérateurs permet de donner une version abstraite de ce théorème.

Soit $(T_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe de convolution à droite sur (X, ξ), de noyau p_t: $T_t f(x) = (f * p_t)(x) = \int_G p_t(y^{-1}x) f(y) \, dy$. Supposons $(T_t)_{t \geqslant 0}$ sous-markovien symétrique, autrement dit p_t positif, symétrique, d'intégrale inférieure ou égale à 1.

Proposition. *Si $(T_t)_{t>0}$ a pour dimensions (d, D), et si $1 \leqslant p \leqslant 2$,*

$$A_{(d/p, D/p)}^{p,1} \to A(X).$$

Preuve. D'après la proposition 5 du §3, $A_{(d/p, D/p)}^{p,1} \to A_{(d/2, D/2)}^{2,1}$, si $p \leqslant 2$. Il suffit donc de traiter le cas $p = 2$. Fixons k un entier dépassant $d/2$ et $D/2$.

Soit $f \in \mathscr{D}$. En intégrant $k-1$ fois par parties l'identité $f = \int_0^{+\infty} AT_t f \, dt$.

écrivons $f = c_k \int_0^{+\infty} t^{k-1} A^k T_t f\,dt = c_k \int_0^{+\infty} t^{k-1} A^k T_{t/2} f * p_{t/2}\,dt$. On a d'autre part

$$\sup_x p_t(x) \times \|T_t\|_{1 \to \infty} \leqslant C \begin{cases} t^{-d/2} & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{-D/2} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

et $\int_G p_t(x)\,dx \leqslant 1$. Donc

$$\|p_t\|_2 \leqslant C \begin{cases} t^{-d/4} & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{-D/4} & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Donc

$$f = \int_0^{+\infty} \varphi_t * \psi_t\,dt,$$

avec

$$\varphi_t = c_k t^{k-1} A^k T_{t/2} \qquad \text{et} \qquad \psi_t = p_{t/2},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \|\varphi_t\|_2 \|\psi_t\|_2\,dt &\leqslant C\left(\int_0^1 t^{k-1-d/4} \|A^k T_{t/2} f\|_2\,dt \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{+\infty} t^{k-1-D/4} \|A^k T_{t/2} f\|_2\,dt\right) \\ &\leqslant C' A^{2,1}_{(d/2, D/2)}(f), \end{aligned}$$

d'où le plongement annoncé.

Plus généralement, on peut considérer, si $1 < p < +\infty$, les algèbres

$$A_p(X) = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n * \psi_n \mid \varphi_n \in L^p, \psi_n \in L^q, \sum_{n=1}^{+\infty} \|\varphi_n\|_p \|\psi_n\|_q < +\infty \right\},$$

où $1/p + 1/q = 1$ [10].

On obtient alors de la même façon la généralisation de [15]:

PROPOSITION. *Si $(T_t)_{t>0}$ a pour dimensions (d, D), et si $1 < p < +\infty$,*

$$A^{r,1}_{(d/r, D/r)} \to A_p(X) \qquad \forall r,\ 1 \leqslant r \leqslant p.$$

Remarque. Si on avait travaillé avec un semi-groupe de convolution à gauche, le plongement précédent aurait eu lieu dans $A_q(X)$.

Dans $\mathbb{R}^n$, on retrouve l'énoncé de Herz en utilisant l'équivalence entre les différentes définitions des espaces de Besov (cf. [26]). Il est aussi possible d'appliquer les propositions précédentes dans le contexte de certains groupes abéliens totalement discontinus et de retrouver ainsi les résultats de [18].

6. Plongements de Sobolev dans les groupes de Lie

Soit $(T_t)_{t\geqslant 0}$ comme au §1; supposons en outre que $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a pour dimensions (d, D), où $d\in[0, +\infty]$ et $D\in[0, +\infty]$ (rappelons que $D=+\infty$ signifie que $(T_t)_{t\geqslant 0}$ admet tout nombre positif comme dimension à l'infini). Nous allons, en rassemblant les résultats précédents, énoncer des théorèmes de plongement de L^p_α dans des sommes et des intersections d'espaces de Lebesgue et de Lipschitz, suivant la position de αp par rapport à d et D. Nous distinguerons quatre cas, selon la situation relative de d et D.

Une telle étude est justifiée par son application à l'analyse sur les groupes de Lie. Soit en effet G un groupe de Lie réel, connexe, et unimodulaire, de mesure de Haar dg, et $\{X_1, ..., X_k\}$ une famille de champs invariants à gauche sur G vérifiant la condition de Hörmander: l'algèbre de Lie qu'ils engendrent est l'algèbre de Lie de G toute entière. Soit $(T_t)_{t\geqslant 0}$ le semi-groupe sous-markovien symétrique engendré par le sous-laplacien $\sum_{i=1}^k X_i^2$ sur $L^2(G, dg)$.

Varopoulos a montré [29–31] que $(T_t)_{t\geqslant 0}$ a pour dimensions (d, D), où d et D sont reliés à la fonction de croissance du volume sur G pour une distance, appelée distance du contrôle, associée aux champs $\{X_1, ..., X_k\}$; d dépend de G et des champs choisis, D ne dépend que de G.

Nous verrons que chacun des cas abstraits que nous envisageons se produit pour une certaine classe de groupes de Lie, et des sous-laplaciens naturels.

Il serait fastidieux d'expliciter les preuves des énoncés qui vont suivre: le lecteur intéressé saura en combiner les éléments, qui se trouvent aux §1, 3, et 4. Les plongements des espaces L^p_α que nous allons envisager vaudront pour $1<p<+\infty$, et $\alpha\geqslant 0$. Si $p=1$ et si L^p_α se plonge dans L^q, on interprètera ce dernier comme un espace faible.

Quant à l'hypothèse d'analyticité sur L^1, elle est vérifiée par $(T_t)_{t\geqslant 0}$ si G est à croissance polynômiale du volume; de toute façon, on peut raisonner sur un subordonné de $(T_t)_{t\geqslant 0}$: un tel semi-groupe est toujours analytique sur L^1.

1. $0\leqslant d=D<+\infty$. Pour un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, cette situation se présente si et seulement si il est stratifié [29, p. 430], et si les champs qui interviennent dans le sous-laplacien considéré

engendrent la première tranche de la stratification. On retrouve alors un énoncé analogue à celui qui vaut dans $\mathbb{R}^d$:

$$L^p_\alpha \to \begin{cases} \Lambda_{\alpha - d/p} & \text{si} \quad \alpha p \geqslant d \\ L^{dp/(d-\alpha p)} & \text{si} \quad \alpha p < d. \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}^d$, L^p_α se plonge pour $\alpha p = d$ dans une classe exponentielle [27, 17]. Dans [20, 21], L. Saloff-Coste envisage cette situation pour les groupes de Lie.

2. $0 \leqslant d < D < +\infty$. Alors $(T_t)_{t \geqslant 0}$ est de dimension n, $\forall n \in [d, D]$. Cette situation se présente par exemple si G est un groupe nilpotent simplement connexe, non stratifié [29]. On a alors

$$L^p_\alpha \to \begin{cases} \Lambda_{\alpha - d/p} \cap \Lambda_{\alpha - D/p} = \Lambda_{(\alpha - d/p, \alpha - D/p)} & \text{si} \quad \alpha p \geqslant D. \\ L^{Dp/(D-\alpha p)} \cap \Lambda_{\alpha - d/p} \to L^\infty & \text{si} \quad d < \alpha p < D \\ \bigcap\limits_{Dp/(D-\alpha p) \leqslant q < +\infty} L^q & \text{si} \quad \alpha p = d \\ L^{Dp/(D-\alpha p)} \cap L^{dp/(d-\alpha p)} & \text{si} \quad \alpha p < d. \end{cases}$$

Notons que l'introduction des espaces à deux indices, ou bien des espaces "locaux" et "à l'infini" n'aurait pas été justifiée par l'étude de ce seul cas. Pour une étude plus précise des cas limites $\alpha p = d$ et $\alpha p = D$, cf. à nouveau [21].

3. $0 \leqslant d < D = +\infty$. Ceci se produit si et seulement si G est à croissance exponentielle du volume [12, 30]. Ce phénomène ne dépend que de G, et non des champs $\{X_1, ..., X_k\}$, dont le choix influe par contre sur d. Des exemples de groupes de Lie unimodulaires et à croissance exponentielle du volume sont fournis par les groupes de Lie semi-simples non compacts, et certains groupes résolubles non nilpotents.

A nouveau, $(T_t)_{t \geqslant 0}$ est de dimension n, $\forall n \in [d, +\infty[$: il est inutile d'employer les localisations introduites au §3.

$$L^p_\alpha \to \begin{cases} \bigcap\limits_{p < q < +\infty} L^q \cap \Lambda_{\alpha - d/p} \to L^\infty & \text{si} \quad \alpha p > d \\ \bigcap\limits_{p < q < +\infty} L^q & \text{si} \quad \alpha p = d \\ \bigcap\limits_{p < q \leqslant dp/(d-\alpha p)} L^q & \text{si} \quad \alpha p < d. \end{cases}$$

Le plongement de L^p_α dans L^p pour $\alpha > 0$ a lieu si et seulement si $\|T_t\|_{p \to p}$ décroit exponentiellement avec t. Cela équivaut au fait que G soit non amenable, et c'est le cas si G est semi-simple non compact.

Rappelons que dans $\mathbb{R}^n$, contrairement à ce qui se produit ici dans les cas 2 et 3, les espaces L^p_α contiennent toujours des fonctions non bornées.

4. $0 < d < D < +\infty$. Ceci peut se produire par exemple si G est un groupe de Lie nilpotent connexe non simplement connexe. Dans ce cas, $(T_t)_{t \geq 0}$ n'est de dimension n pour aucun n.

$$L^p_\alpha \to \begin{cases} \Lambda_{\alpha - d/p} + \Lambda_{\alpha - D/p} = \Lambda_{(\alpha - d/p,\, \alpha - D/p)} & \text{si} \quad \alpha p \geq d \\ L^{Dp/(D-\alpha p)} + \Lambda_{\alpha - D/p} & \text{si} \quad D \leq \alpha p < d \\ L^{dp/(d-\alpha p)} + L^{Dp/(D-\alpha p)} & \text{si} \quad \alpha p < D. \end{cases}$$

5. Supposons maintenant seulement que $(T_t)_{t \geq 0}$ a pour dimension locale d, et cessons de supposer que $(T_t)_{t \geq 0}$ n'a pas de point fixe dans $L^p(X, \xi)$. C'est ce qui se produit si G est un groupe de Lie compact. Les semi-normes L^p_α et Λ_β ne sont pas des normes, mais on peut énoncer

$$L^p \cap L^p_\alpha \to \begin{cases} \Lambda_{\alpha - (d/p)} \cap L^\infty & \text{si} \quad \alpha p \geq d \\ L^{dp/(d-\alpha p)} & \text{si} \quad \alpha p < d. \end{cases}$$

Le cas $\alpha p = d$ est traité dans [21].

Remerciements

Nous remercions Carl Herz d'avoir attiré notre attention sur les questions traitées au §5, et Damien Lamberton pour d'utiles remarques.

Bibliographie

1. B. Beauzamy, Espaces de Sobolev et de Besov d'ordre variable définis sur L^p, *C. R. Acad. Sci. Paris* **274** (1972), pp. 1935–1938.
2. S. Bernstein, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **158** (1914), 1661–1664.
3. P. Butzer et H. Berens, "Semi-groups of Operators and Approximation," Springer-Verlag, New York, 1967.
4. R. Coifman, R. Rochberg, et G. Weiss, Applications of transference: The L^p version of von Neumann's inequality and Littlewood–Paley–Stein theory, *in* "Linear Spaces and Approximation" (Butzer and Nagy, Eds.), Birkhaüser Verlag, Basel, 1978.
5. T. Coulhon, Dimension à l'infini d'un semi-groupe analytique, *Bull. Sci. Math.* **114** (3) (1990), 485–500.
6. T. Coulhon et L. Saloff-Coste, Théorèmes de Sobolev pour les semi-groupes d'opérateurs et application aux groupes de Lie unimodulaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **310** (1990), 627–630.
7. T. Coulhon et L. Saloff-Coste, Théorie de Hardy–Littlewood–Sobolev pour les semi-groupes d'opérateurs et application aux groupes de Lie unimodulaires, *Séminaire d'Analyse de l'Université Clermont-Ferrand II, 87/88*, exposé n° 21, 1989.

8. M. COWLING, Harmonic analysis on semi-groups, *Ann. of Math. (2)* **117** (1983), 267–283.
9. S. DRURY, An endpoint estimate for certain k-plane transforms, *Canad. Math. Bull.* **29** (1) (1986).
10. P. EYMARD, Algèbres A_p et convoluteurs de L^p, *in* "Séminaire Bourbaki," n° 367, 1969–70.
11. G. B. FOLLAND, Lipschitz classes and Poisson integrals on stratified groups, *Studia Math.* **66** (1979), 37–55.
12. Y. GUIVARC'H, Croissance polynômiale et période des fonctions harmoniques, *Bull. Soc. Math. France* **101** (1973), 333–379.
13. C. HERZ, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, *J. Math. Mech.* **18**, 283–323.
14. I. INGLIS, Bernstein's theorem and the Fourier algebra of the Heisenberg group, *Bull. Un. Mat. Ital. (6)* **2A** (1983), 39–46.
15. N. LOHOUÉ, Une condition d'appartenance à $A_p(T)$, *C. R. Acad. Sci. Paris* **270** (1970), 736–738.
16. P. A. MEYER, Sur la théorie de Littlewood–Paley–Stein, *in* "Séminaire de Probabilités n° XIX," 113–129, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1985.
17. J. MOSER, A sharp form of an inequality by N. Trudinger, *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1971).
18. C. ONNEWEER, Generalized Lipschitz spaces and Herz spaces on certain totally disconnected groups, *in* "Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach Spaces," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 939, Springer-Verlag, Cleveland, 1981.
19. K. SAKA, Besov spaces and Sobolev spaces on nilpotent Lie groups, *Tohoku Math. J.* **31** (1979), 383–437.
20. L. SALOFF-COSTE, Théorèmes de Sobolev et inégalités de Trudinger sur certains groupes de Lie, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **306** (1988).
21. L. SALOFF-COSTE, Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynômiale, *Arkiv Mat.* **28** (1990), 315–331.
22. S. SOBOLEV, On a theorem of functional analysis, *Amer. Math. Sci. Transl. Ser. 2* **34** (1963), 39–68.
23. E. STEIN, "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
24. E. STEIN, "Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood–Paley Theory," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
25. E. STEIN ET G. WEISS, "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
26. M. TAIBLESON, On the theory of Lipschitz spaces of distributions on euclidean n-space, I, *J. Math. Mech.* **13** (1964), 407–480; II, *J. Math. Mech.* **14** (1965), 821–840; III, *J. Math. Mech.* **15** (1966), 973–981.
27. N. TRUDINGER, On embeddings into Orlicz spaces and some applications, *J. Math. Mech.* **17** (1967).
28. N. VAROPOULOS, Hardy–Littlewood theory for semi-groups, *J. Funct. Anal.* (1985), 240–260.
29. N. VAROPOULOS, Analysis on nilpotent groups, *J. Funct. Anal.* **66** (1986), 406–431.
30. N. VAROPOULOS, Analysis on Lie groups, *J. Funct. Anal.* **76** (1988), 346–410.
31. N. VAROPOULOS, Random walks and Brownian motion on manifolds, *in* "Symposia Mathematica," Vol. 29, Academic Press, San Diego, 1987.
32. K. YOSIDA, "Functional Analysis," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1980.